

Розділ 7

Приклад 7.1

На діафрагму з $D = 6 \text{ мм}$ нормально падає плоска монохроматична хвиля ($\lambda = 600 \text{ нм}$). За діафрагмою екран на відстані $v = 3 \text{ м}$. Знайти: а) скільки зон Френеля вміщується в отвір діафрагми? б) яким буде центр дифракційної картини на екрані: світлим чи темним?

в) інтенсивність світла у центрі картини порівняно з інтенсивністю за відсутності екрану?

г) за якого γ отвору у центрі буде найтемніша пляма?

д) Яким буде центр тіні на екрані, якщо діафрагму замінити непрозорим таким самим диском.

е) Як потрібно змістити P від диска, щоб був max інтенсивності світла у плямі Пуассона.

Розв'язання: $D = 2r_m = 6 \text{ мм}$, $a = \infty$, $v = 3 \text{ м}$, $\lambda = 0,6 \cdot 10^{-6} \text{ м}$

а)
$$m = \frac{r_m^2}{v\lambda} = 5$$

б) $A(P) \approx A_1 \cdot \frac{1}{2} + A_5 \cdot \frac{1}{2}$. Оскільки дві амплітуди додаються світла пляма буде в P .

в) $A_1 \approx A_5 \Rightarrow A(P) \approx A_1 \Rightarrow I(P) \approx I_1$

$I_1 = 4I_0$, I_0 - інтенсивність світла на перешкоді
 $\Rightarrow I(P) \approx I_1 = 4I_0$, тобто $I(P)$ майже в 4 $> I_0$

г) $A(P) = A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + \dots \pm A_m$

Темно буде коли $m = 2 \cdot n$, $n = 1, 2, \dots$

Найбільш темно з $m = 2$, оскільки $A_2 < A_4 < A_m$

$$\lambda_2 = \sqrt{3 \cdot 6 \cdot 0,6 \cdot 10^{-6}} = 1,9 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

г) $A(P) = -A_6 + A_7 \dots = [A_1 - A_2 + \dots] - [A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + A_5] \approx$
 $\approx \frac{1}{2} A_1 - \left[\frac{1}{2} A_1 + \left(\frac{1}{2} A_1 - A_2 + \frac{1}{2} A_3 \right) + \left(\frac{1}{2} A_3 - A_4 + \frac{1}{2} A_5 \right) + \frac{1}{2} A_5 \right]$

$$A(P) \approx \frac{1}{2} A_1 - \frac{1}{2} A_1 - \frac{1}{2} A_5 = -\frac{1}{2} A_5$$

Буде спостерігатися світла пляма з I трохи менше I_0

е) $v_m = \frac{R^2}{m\lambda}$

$$v_5 = 1,0 \text{ м}; v_4 = 3,75 \text{ м}; v_3 = 5 \text{ м}; v_2 = 7,5 \text{ м}; v_1 = 15 \text{ м} - \text{max}$$

Приклад 7.2

Монохроматична плоска хвиля з I_0 падає нормально на диск, який для P закриває I зону Френеля. Якою I_P у P після того, як прибрати диск: а) половину б) половину зовнішньої половини першої зони Френеля

Розв'язання:

а) $\vec{A}_i$ - вектор підзон $\Rightarrow \frac{\vec{a}_i}{2} \Rightarrow \vec{A}_1 = \frac{\vec{a}_1}{2} + \dots + \frac{\vec{a}_N}{2} = \frac{\vec{A}}{2}$
 $\vec{A}_P = \vec{A}_\infty + \vec{A}_1$, вектори протилежно направлені $\Rightarrow \vec{A}_P \approx 0 \Rightarrow I_P \approx 0$

$$\bullet \vec{A}_0 = \vec{A}_{11} + \vec{A}_{12} + \vec{A}_{\infty}$$

$\vec{A}_{\infty}$ - незміниться

$\vec{A}_{11}$ - не вноситься

$\vec{A}_{12}$ - втратить половину

$$\vec{A}_P = \vec{A}_{\infty} + \frac{\vec{A}_{12}}{2}; \quad A_{\infty} \approx A_0; \quad \frac{A_{12}}{2} = \frac{\sqrt{2} A_0}{2} \Rightarrow$$

$$A_P \approx \sqrt{A_{\infty}^2 - \left(\frac{A_{12}}{2}\right)^2} = \frac{A_0}{\sqrt{2}}$$

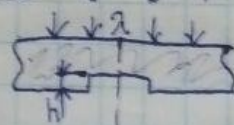
Оскільки I в точці спостереження пропорційна квадрату амплітуди світлового поля, то $I_P \approx \frac{I_0}{2}$

Приклад 7.3

Плоска світлова хвиля $\lambda = 0.6 \mu\text{m}$ падає на скляну пластинку, на протилежному боці виїмка. Для P представляє перші півтори зони

Знайти h (глибина виїмки), за якої I в P : а) max;

б) min; в) I падаючого



P



Розв'язання:

а) $A_0 = \vec{A}_{1,5} + \vec{A}_{\infty}$. Через виїмку, частина хвильового фронту за ii межами відстає за фазою на $\delta = \frac{2\pi}{\lambda} h(n-1)$ від частини в межах виїмки. Повора A_{∞} на кут θ

A_{∞} повертаємо на $\delta = \frac{3}{4}\pi + 2\pi m, m=1, 2, \dots$

Можливо якщо h задовольняє: $\frac{3}{4}\pi + 2\pi m = \frac{2\pi}{\lambda} h(n-1)$

$$\Rightarrow h = \frac{\lambda}{n-1} \left(m + \frac{3}{8}\right) = 1,2 \left(m + \frac{3}{8}\right) \text{ (нм)}$$

для max у в Р $h = 0,45; 1,65; 2,85 \dots$ (нм) $\vec{A}_{1,5}$

а) $\vec{A}_\infty$ повинен бути протилежним $\vec{A}_{1,5}$, тобто

$$\delta = \frac{7}{4}\pi + 2\pi m$$

$$h = \frac{\lambda}{n-1} \left(m + \frac{7}{8}\right) \Rightarrow h = 1,05; 2,25; 3,45 \dots \text{ (нм)}$$



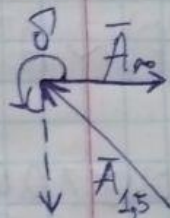
б) $A_p = A_0$

1) $\delta = 2\pi m$

$$h = \frac{\lambda}{n-1} = 1,2 \text{ (нм)} \Rightarrow h = 0; 1,2; 2,4 \dots \text{ (нм)}$$

2) $\delta = \frac{3}{2}\pi + 2\pi m$

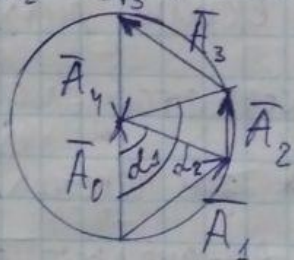
$$h = \frac{\lambda}{n-1} \left(m + \frac{3}{4}\right) \Rightarrow h = 0,9; 2,1; 3,3 \dots \text{ (нм)}$$



Приклад 7.4

Монохроматична хвиля з λ_0 падає на непрозоре кільце. Внутр - $R_1 = r_1 \sqrt{\frac{1}{2}}$, зовн - $R_2 = r_1 \sqrt{\frac{2}{3}}$. Знайти I в Р, для якої r_1 - радіус I зони Френеля.

Розв'язання:



A_1 - ампл хвилі в точці спостереження від збурень, створених на R_1

A_2 - ампл хвилі від збурень, створених кільцем, яке не пропускає світла.

A_3 - ампл хвилі в точці спостереження від збурень, створених зовн част зони.

A_4 - ампл хвилі в точці створеною усіма крім I зони.

A_0 - ампл падаючої на перешкоду хвилі.

$$\bar{A} = \bar{A}_1 + \bar{A}_3 + \bar{A}_4$$

Для I зони Френеля: $\pi r_1^2 \sim \lambda = \pi$, $d_1 = \frac{\pi R_1^2}{r_1^2} = \frac{\pi r_1^2}{2r_1^2} = \frac{\pi}{2}$

$$L_2 = \frac{\pi R_2^2}{r_1^2} = \frac{2\pi r_1^2}{3r_1^2} = \frac{2\pi}{3}$$

$$A_1 = \sqrt{2} A_0; A_3 = A_0; A_4 = A_0$$

$\bar{A}(P)$ визначаємо через проекцію:

$$O_x: A_x = A_1 \cos 45^\circ - A_3 \cos 30^\circ = A_0 - \frac{\sqrt{3}}{2} A_0 = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) A_0$$

$$O_y: A_y = A_1 \sin 45^\circ + A_3 \cos 30^\circ - A_4 = A_0 + \frac{1}{2} A_0 - A_0 = \frac{A_0}{2}$$

$$I(P) \sim A^2(P) = A_x^2 + A_y^2 = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 A_0^2 + \frac{A_0^2}{4} \approx 0,27 I_0$$

Приклад 7.5

Хвиля $\lambda = 0,65 \text{ мкм}$ падає на скляку пластину, на протилежному боці є виступ з непрозора смужка шириною $a = 0,3 \text{ мм}$. Висота підібрана, що в точці 2 I на екрані мах. Знайти I_1, I_2

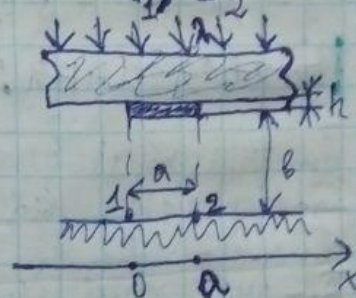
Розв'язання: Використовуємо ефіраль

Корню. $A_{1л}$ — внесок лівих зон Шустера.

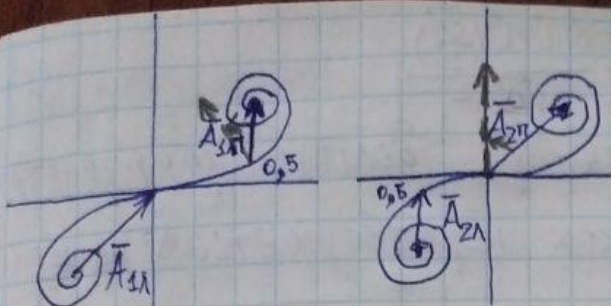
$A_{1п}$ — внесок правих. $A_{2л}, A_{2п}$ — аналогічно

Враховуємо перекриття смужкою:

$$\lambda = \sqrt{\frac{2}{b\lambda}} \approx 0,5$$



1/2;



Гарфізність методу спіралі Корню полягає в тому, що амплітуда світлового поля вважається пропорційною довжині вектора.

Вимірявши $\Rightarrow A_{1n} \sim 20 \text{ мм} \quad A_{2n} \sim 12 \text{ мм}$
 $A_{1n} \sim 12 \text{ мм} \quad A_{2n} \sim 20 \text{ мм}$

Спіралі Корню для визначення амплітуди хвиль у точках 1 і 2 без урахування виступу

Наявність виступу призводить до зміни правої на $\delta = \frac{2\pi}{\lambda} h(n-1)$. Мах в 2 коли $\delta = \frac{\pi}{n} + 2\pi m$, через збігання A_{2n} і A_{2n} . A_{1n} і $A_{1n} \Rightarrow \perp$

$$\bar{A}_2 : A_2 = A_{2n} + A_{2n} = 12 + 20 = 32 \text{ мм}$$

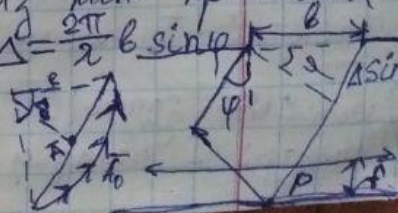
$$A_1 = \sqrt{(A_{1n})^2 + (A_{1n})^2} = \sqrt{544} \approx 23 \text{ мм}$$

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{(32)^2}{(23)^2} \approx 1,9$$

Приклад 7.6

Світло λ падає на прямокутну щілину, ширина b . Знайти кутовий розподіл I за умови Fraunhofer дифракції а також кутові положення мінімумів

Розв'язання: Щілину ділимо на смужки. Кожна смужка, як джерело хвиль. Різниця фаз між крайніми елементами в межах щілини: $\delta = \frac{2\pi}{\lambda} = \Delta = \frac{2\pi}{\lambda} b \sin \varphi$. На векторній діаграмі, кожен вектор відповідає амплітуді світлового поля в P представлений дугою з радіусом R та кутом δ . Довжина дуги $A_0 = R\delta$, $A = 2R \sin \frac{\delta}{2}$



$$A = A_0 \frac{\sin(\frac{\sigma}{2})}{\sigma/2} \Rightarrow I = I_0 \frac{\sin^2(\frac{\sigma}{2})}{(\frac{\sigma}{2})^2}$$

З збільшення φ ланцюг векторів більше закручується.
 За $\sigma = 2\pi, 4\pi, \dots, 2m\pi$ ланцюжок перетворюється на коло.
 Умова міні: $\sin \varphi = m\lambda$

Приклад 7.7

При падінні світла на ґратку шириною 10 мм. компоненти жовтої лінії (589 і 589,6 нм) спостерігаються розділено, починаючи з 5 порядку спектра. Знайти: а) період ґратки б) за якої ширини можна розділено спостерігати в 3 порядку дублет з $\lambda = 480$ нм, компоненти відрізняються на 0,13 нм

Розв'язання:

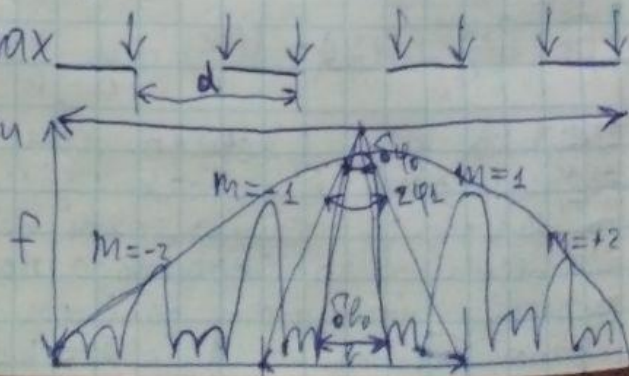
а) $K = \frac{\lambda}{d} = m \frac{L}{d}$, m - порядок, L - ширина, d - період $\Rightarrow$
 $d = \frac{m \cdot L \cdot \Delta \lambda}{\lambda} \approx 50 \text{ мкм}$
 б) $R_2 = \frac{\lambda_2}{\Delta \lambda_2} = m_2 \frac{L_2}{d} \Rightarrow L_2 = \frac{\lambda_2 d}{\Delta \lambda_2 m_2} \approx 60 \text{ мм}$

Приклад 7.8

ґратка освітлюється ($\lambda = 500$ нм). $F' = 4$ м, $l = 20,2$ см, $L = 10$ см. Визначити: а) період, б) кількість штрихів на 1 мм, в) кутова та лінійна ширина 0-макс

г) кутова та лінійна дисперсія ґратки у спектрі I порядку

д) роздільна здатність ґратки у спектрі I порядку



Розв'язання:

а) При $m=1$ $d = \frac{\lambda}{\sin \varphi_1^{\max}}$

б) $\sin \varphi_1^{\max} = \tan \varphi_1^{\max} = \frac{h}{2f'}$

$d \approx \frac{22f'}{h} = 4,95 \text{ мкм}$

в) $\frac{1}{d} \approx 200 \frac{\text{штук}}{\text{мм}}$

г) $\delta \varphi_0 = 2\varphi_1^{\min}$, $\varphi_1^{\min} \rightarrow 0 \Rightarrow \sin \varphi_1^{\min} \approx \varphi_1^{\min} = \frac{\lambda}{2N}$

$\delta \varphi_0 = 2 \frac{\lambda}{2N} = 2 \frac{\lambda}{L} = 10^{-5} \text{ рад} = 2,06''$

$\delta \ell_0 = f' \cdot \delta \varphi_0 = 10^6 \cdot 10^{-5} = 10 \text{ мкм}$

д) $m=1$; $D\varphi = \frac{1}{\sqrt{d^2 - \lambda^2}} = 0,2 \frac{\text{рад}}{\text{мкм}}$

$D\ell = f' \cdot D\varphi = 200 \frac{\text{мм}}{\text{мкм}}$

е) $R = mN = m \frac{L}{d} \approx 2 \cdot 10^4$

Приклад 7.9

Хвиля падає на відбивачну ґратку з періодом $d=2 \text{ мм}$, $\theta=30^\circ$. Знайти $\varphi_{\max}$ найбільшого порядку, при $\lambda=546 \text{ нм}$

Розв'язання:

$d(\sin \theta - \sin \varphi_m) = m\lambda$

$\sin \varphi_{\max} \leq \pm 1 \Rightarrow m_{\max} \leq \frac{d}{\lambda} (1 + \sin \theta) = 7,27 \Rightarrow m_{\max} = 7$

$d(\sin \theta - \sin \varphi_{\max}) = m_{\max} \lambda \Rightarrow$

$\varphi_{\max} = \arcsin \left(\frac{d}{\lambda} m_{\max} \sin \theta \right) = 67^\circ 51'$

Приклад 7.10

Знайти ширину основи тригранної призми з $\left| \frac{dn}{d\lambda} \right| = 0,10 \text{ мкм}^{-1}$; щоб вона мала таку ж роздільну здатність, як ґратка з 10^4 штрихів у 1 см.

Розв'язання:

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = mN = m \frac{L}{d}, m - \text{порядок}, L - \text{ширина}, d - \text{період. } R_{\text{дп}} = 2 \cdot 10^4$$

$$R_{\text{гр}} = \frac{\lambda}{\delta\lambda} \text{ , } \lambda - \text{ширина, } \left| \frac{dn}{d\lambda} \right| - \text{дисперсія} \Rightarrow$$

$$b = \frac{R}{\left| \frac{dn}{d\lambda} \right|} = 20 \text{ см}$$

Приклад 7.11

Діаметр телескопа 1000 мм. Знайти міні кутову відстань $\delta\varphi$ між зірками, коли диф зображення розділені при $\lambda = 0,55 \text{ мкм}$

Розв'язання:

Зображення двох точкових джерел розділено, якщо диф має першої зірки збігається з міні другої.

$$\delta\varphi = \varphi_E = 1,22 \frac{\lambda}{D} = 0,67 \cdot 10^{-6} \text{ рад} = 0,14''$$

Приклад 7.12 $\lambda = 0,55 \text{ мкм}$

На якій max до предметів відстані між ними $d = 4 \text{ м}$, видно розділено:

а) оком, зіниця 3 мм, б) зорова труба, діаметр 33 мм.

в) Врахувати кутівий діаметр диф зображення точки, яке описується а) і б)

Розв'язання:

$$\text{Розділено коли } \delta\varphi = \frac{d}{l} \geq 1,22 \frac{\lambda}{D} \Rightarrow l_{\text{max}} = \frac{d \cdot D}{1,22 \lambda}$$

$$\text{а) } l_{\text{max}} \approx 4,5 \text{ м ; б) } l_{\text{max}} \approx 56,5 \text{ м}$$

$$\text{в) } \delta\varphi_0 = 2\varphi_E = 2,44 \frac{\lambda}{D} \approx 0,45 \cdot 10^{-3} \text{ рад} = 1,5' - \text{ОКО}$$

$$\delta\varphi_0 \approx 0,35 \cdot 10^{-4} \text{ рад} = 7'' - \text{зорова труба}$$

Приклад 7.13

Визначити роздільну здатність мікроскопа $\left(A=0,09\right)$ та $n=1,6$. $\lambda=546\text{ нм}$

Розв'язання:

Роздільна здатність — ^{обернена} величина до Δr min роздільного розміру об'єкта спостереження, що визначається:

$$R = \frac{1}{\Delta r_{\min}} = \frac{2n \sin \theta_A}{\lambda}$$

$$\sin \theta_A = 0,09 \Rightarrow R_1 = 330 \text{ мм}^{-1} - \text{без } n=1,6$$

$$R_2 = 528 \text{ мм}^{-1} - \text{з } n=1,6$$